

Др. Василь Стасюк.

Ще про узасадненє геометрії Лобачевського.

Dr. Wassyl Stassjuk: Noch über die Begründung der Lobatschefskij-schen Geometrie).

В супереч аксіомови Евкліда Лобачевський приймає, що через точку можна провести більш як одну пряму, що не перетинає даної прямої. Виходячи з того нового заложення випровадив він цілу нову геометрію, яку названо його іменем геометрією Лобачевського або також геометрією гіперболічною.

Очевидно, колиб аксіом Евкліда міг бути доказаний при помочи інших аксіомів, Лобачевський міг би був потрапити в суперечности. Тим часом так не сталось. Лобачевський не найшов ніяких суперечностей, а так само і прочі геометри, що по нїм продовжали його діло.

Заходить питанє, чи не найде ся єще яка суперечність. Що се неможливе, виказав Кляйн через випровадженє метового означеня мір чисто метовим методом т. є незалежно від евклідової геометрії.

В сій праці подано на се також геометричний та більш елементарний доказ, послугуючи ся самою геометрією Лобачевського.

А саме через мет площі на граничну кулю дістаємо на кулі відоме представленє геометрії в евклідовій площі при помочи метового означеня мір. При помочи сего мету получено геометрію Лобачевського (в площі) з евклідовою геометрією (на граничній кулі) і ми є в можности впрост при помочи конструкції кожній фігурі на площі Лобачевського найти відповідну на граничній кулі і на відворот. Через се маємо доказане, що в геометрії Лобачевського неможливі суперечности, бо тоді мусілиб

бути такі суперечності і у відповідній фігурі на граничній кулі, отже в евклідовій геометрії, а се неможливе. Тим самим і аксіом Евкліда незалежний від прочих аксіомів.

В сій праці переведено доказ для площі при помочи простору о трох вимірах. Очевидно сї виводи дають ся узагальнити і те саме може бути доказане і для простору о n вимірах (R_n) при помочи простору о $(n+1)$ вимірах (R_{n+1}).

І. Деякі твердження геометрії Лобачевського.

Насамперед для вигоди подамо деякі твердження геометрії Лобачевського¹⁾.

1. Твердження про граничне коло.

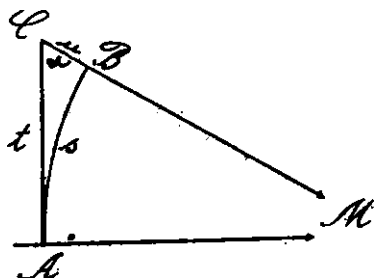


Рис. 1.

З точки C побіч прямої AM поведено 2 прямі, а саме $CA \perp AM$ і $CM \parallel AM$. Крива $AB=s$ є дугою граничною кола о осях AM і CM . Впровадьмо еще означеня $AC=t$, $BC=u$, $\alpha = \angle MCA$, то буде

$$(1) \operatorname{ch} t = e^u$$

$$(2) \sin \alpha = e^{-u}$$

$$(3) s = th t = \cos \alpha$$

2. Тригонометричні взірці для прямокутних трикутників. Нехай буде ABC прямокутним трикутником з кутами $\alpha, \beta, \gamma = 90^\circ$ і протилежними боками a, b і c .

¹⁾ Деякі з сих тверджень подані в: Lobatschefskij, Zwei Geometrische Abhandlungen, Leipzig 1898 і в: Haussdorff: Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie (Berichte der sächs. Ges. der Wissenschaften, Math. Phys. Klasse Bd. 51. J. 1899). А всі ті твердження подані в: Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, Sammlung Schubert Bd. XLIX.

Твердження тригонометричні будуть тоді звучати:

$$(4) \quad ch\,c = ch\,a \cdot ch\,b$$

$$(5) \quad \begin{cases} \cos\,\alpha = \sin\,\beta \cdot ch\,a \\ \cos\,\beta = \sin\,\alpha \cdot ch\,b \end{cases}$$

$$(6) \quad ch\,c = ctg\,\alpha \cdot ctg\,\beta$$

$$(7) \quad \begin{cases} sh\,a = \sin\,\alpha \cdot sh\,c \\ sh\,b = \sin\,\beta \cdot sh\,c \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} th\,a = sh\,b \cdot tg\,\alpha \\ th\,b = sh\,a \cdot tg\,\beta \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} th\,a = th\,c \cdot \cos\,\beta \\ th\,b = th\,c \cdot \cos\,\alpha \end{cases}$$

3. Сорядні Вейєрштрасса.

А) сорядні точки

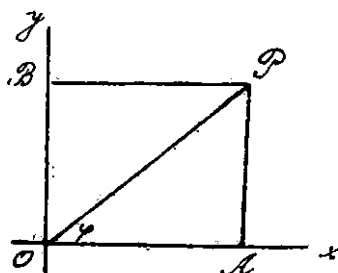


Рис. 2.

Довільну точку P лучимо з початком O прямокутного укладу сорядних Oxy прямою OP , а опріч сього ведемо прямі $PA \perp Ox$ і $PB \perp Oy$. Дальше нехай буде: $\varphi = \angle POA$.

Під сорядними Вейєрштрасса точки P розуміємо величини:

$$(10) \quad \begin{cases} x = sh\,PB = sh\,OP \cdot \cos\,\varphi \\ y = sh\,PA = sh\,OP \cdot \sin\,\varphi \\ p = ch\,OP. \end{cases}$$

Між сими сорядними заходить рівняння:

$$(11) \quad p^2 - x^2 - y^2 = 1.$$

Сорядними точки P вважаємо також усі прочі вартости, що є пропорціональні до величини x, y, p ; значить усі такі уклади, що різняться тільки чинником, є сорядними тої самої точки.

Коли б точка P була точкою безконечно далекою на лучи OP , то тоді сорядні x, y, p після взірця (10) стануть безконечно великі. Однак взаїмне їх відношення дає ся виразити величинами скінченими.

Для кожної точки без огляду на те, чи она безконечно далека, чи ні, є:

$$x : y : p = th\ OP \cdot \cos \varphi : th\ OP \cdot \sin \varphi : 1$$

та для точок безконечно далеких $OP = \infty$, отже

$$th\ OP = 1.$$

Тим самим для точок безконечно далеких будемо мати:

$$(10\ a) \quad x : y : p = \cos \varphi : \sin \varphi : 1$$

а ті сорядні є получені рівнянням

$$(11\ a) \quad p^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

Навпаки, коли маємо дані 3 сорядні x', y', p' , то є 3 можливости:

$$a) \quad p'^2 - x'^2 - y'^2 > 0$$

$$б) \quad p'^2 - x'^2 - y'^2 = 0$$

$$в) \quad p'^2 - x'^2 - y'^2 < 0.$$

В першій випадку сорядні дають ся спровадити до таких величин, що сповняють рівняння (11). В тій цілі треба тільки кожду з них поділити через спільний чинник $\sqrt{p'^2 - x'^2 - y'^2}$. Тоді одержимо:

$$x = \frac{x'}{\sqrt{p'^2 - x'^2 - y'^2}}, \quad y = \frac{y'}{\sqrt{p'^2 - x'^2 - y'^2}}, \quad p = \frac{p'}{\sqrt{p'^2 - x'^2 - y'^2}}.$$

А на підставі рівняня (10) легко буде найти точку P , означену тими сорядними.

У другім випадку рівняння б) є ідентичне з рівнянням (11 а). x', y', p' є отже сорядними безконечно далекої точки. Напрямок сеї точки дає ся сейчас означити на підставі рівнянь (10 а).

У випадку в) величини x, y, p , пропорціональні до x', y', p' , які сповняють рівняння (11), є уявні. Нехай буде:

$$\bar{x} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 - p'^2}}, \quad \bar{y} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 - p'^2}}, \quad \bar{p} = \frac{p'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 - p'^2}},$$

то

$$x = i \cdot \bar{x}, \quad y = i \cdot \bar{y}, \quad p = i \cdot \bar{p}.$$

І тоді

$$p^2 - x^2 - y^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{p}^2 = 1.$$

А що x, y, p є величини уявні, проте нема дійсної точки о таких сорядних. Однак каже ся і в с'ім випадку, що ті три сорядні означають точку, а називаємо її ідеальною точкою.

Б) сорядні прямої.

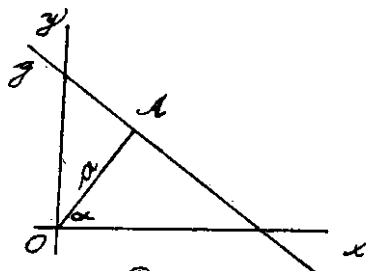


Рис. 3.

Коли $\alpha = \angle AOx$, $a = OA$, де $OA \perp g$, то тоді під сорядними Вейерштрасса прямої g розуміємо величини:

$$(12) \begin{cases} u = \operatorname{ch} a \cdot \cos \alpha \\ v = \operatorname{ch} a \cdot \sin \alpha \\ w = \operatorname{sh} a. \end{cases}$$

Ті сорядні є получені рівнянням

$$(13) \quad u^2 + v^2 - w^2 = 1$$

Сорядними тої самої прямої будуть також кожді прочі три величини, що від u, v, w різнять ся тільки сталим чинником.

Для $a = \infty$ се є для прямих безконечно далеких усі вар-тости сорядних після взору (12) стають безконечно великі. Та їх взаїмне відношенє дає ся виразити в скінчених числах.

Для кожної прямої маємо:

$$u : v : w = \operatorname{cth} a \cdot \cos \alpha : \operatorname{cth} a \cdot \sin \alpha : 1$$

А що для безконечно далеких прямих $a = \infty$, отже $\operatorname{cth} a = 1$, проте буде

$$(12 \text{ а}) \quad u : v : w = \cos \alpha : \sin \alpha : 1.$$

З того слїдує

$$(13 \text{ а}) \quad u^2 + v^2 - w^2 = 0.$$

На відворот, коли маємо дані 3 довільні числа u', v', w' як сорядні прямої, то є три можливости:

- а) $u'^2 + v'^2 - w'^2 > 0$
- б) $u'^2 + v'^2 - w'^2 = 0$
- в) $u'^2 + v'^2 - w'^2 < 0$

і аналогічно, як при срядних точок, даними срядними є визначені тоді прямі

- а) дійсні,
- б) безконечно далекі,
- в) ідеальні.

4. Рівняння прямої. Дана пряма переходить через дану точку, коли їх срядні є получені отсим подвійно-лінійним рівнянням

$$(14) \quad ux + vy - wp = 0.$$

5. Віддаленє двох точок $P_1 (x_1, y_1, p_1)$ і $P_2 (x_2, y_2, p_2)$ виражує ся взором

$$(15) \quad ch P_1 P_2 = p_1 p_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2,$$

при чім між срядними обох точок заходять рівняння (11).

6. Кут двох перетинаючих ся прямих $g_1 (u_1, v_1, w_1)$ і $g_2 (u_2, v_2, w_2)$, яких срядні сповняють рівняння (13), є даний рівнянєм

$$(16) \quad \cos (g_1 g_2) = u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2.$$

Очевидно $\nrightarrow g_1 g_2$ буде мати дійсну вартість тільки тоді, коли для $\cos g_1 g_2$ дістанемо таке вираженє, що

$$| \cos g_1 g_2 | < 1$$

Коли се услівє не є сповнене, то обі прямі не перетинають ся.

7. Рух в площі виражує ся отсим лінійним підставленєм

$$(17) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} p \\ y_1 = \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} p \\ p_1 = \alpha_{31} x + \alpha_{32} y + \alpha_{33} p, \end{cases}$$

де між сочинниками заходять рівняння:

$$(18) \quad \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 - \alpha_{13}^2 = 1 \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 - \alpha_{23}^2 = 1 \\ -\alpha_{31}^2 - \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \\ \alpha_{11} \alpha_{21} + \alpha_{12} \alpha_{22} - \alpha_{13} \alpha_{23} = 0 \\ \alpha_{21} \alpha_{31} + \alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{23} \alpha_{33} = 0 \\ \alpha_{31} \alpha_{11} + \alpha_{32} \alpha_{12} - \alpha_{33} \alpha_{13} = 0 \end{cases}$$

II. Мет площі на граничну кулю.

1. Сорядні відповідних точок.

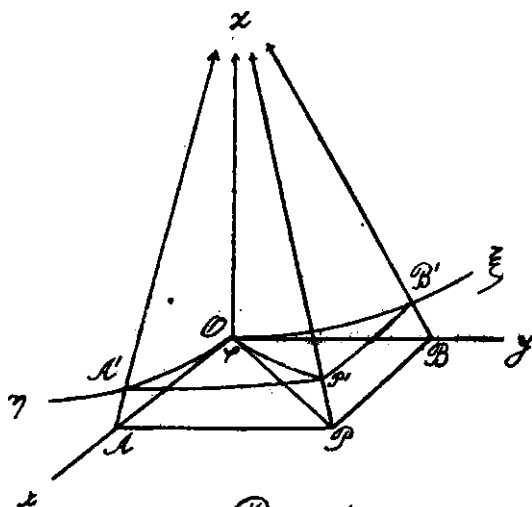


Рис. 4.

На даній площі приймаємо прямокутний уклад сорядних Oxy . З довільної точки P , що лежить на тій площі, ведемо прямі $PA \perp Ox$ і $PB \perp Oy$, а також OP . Означім еще через φ кут $\angle AOP$, то рівняння (10) дадуть нам сорядні точки P .

Через точку O ведемо граничну кулю (о безконечно великім лучи), осію якої є пряма $Oz \perp Oxy$. Ся гранична куля буде дотикати площу xy в точці O .

Дальше поведім з P , A і B рівнобіжні до Oz , то они перетнуть граничну кулю в точках P' , A' і B' . Тим самим площі OAz , OPz , OBz , APz і BPz перетнуть граничну кулю в граничних колах OA' , OP' , OB' , $A'P'$ і $B'P'$. В сей спосіб одержимо на граничній кулі чотирикутник $OA'P'B'$, якого усі боки є граничними колами.

Як відомо, геометрія на граничній кулі є геометрією Евкліда, при чім на місце прямої приходить граничне коло¹⁾. Тим самим в трикутниках на граничній кулі сума кутів виносить 180° .

Отже в чотирикутнику $A'P'B'O$ сума кутів мусить бути 360° . А що після конструкції $\angle O = \angle A' = \angle B' = 90^\circ$, проте

¹⁾ Lobatschewskij, o. c., ст. 12 і 193. Liebmann, o. c., ст. 59—62.

також $\angle P' = 90^\circ$. Значить чотирикутник $A'P'B'O$ є прямокутником.

Приймім тепер на граничній кулі уклад сорядних прямокутних, в якім

$$\begin{aligned} & OA' \text{ є осію } O\xi, \\ \text{а} \quad & OB' \quad \quad \quad O\eta. \end{aligned}$$

Очевидно, що $\angle A'OP' = \varphi$, бо граничні кола $O\xi$ і OP' є стичними прямих OA і OP . В сім укладі точка P' буде мати такі сорядні

$$\begin{aligned} \xi &= OA' = OP' \cos \varphi \\ \eta &= OB' = OP' \sin \varphi. \end{aligned}$$

Сі сорядні дають ся дуже легко виразити через сорядні точки P . Після взірця (3) будемо мати

$$OP' = th \ OP$$

Підставивши сю вартість в попередних рівняннях, одержимо

$$\begin{aligned} \xi &= th \ OP \cdot \cos \varphi \\ \eta &= th \ OP \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

З другої сторони після взорів (10) маємо

$$\frac{x}{p} = th \ OP \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{y}{p} = th \ OP \cdot \sin \varphi$$

Отже

$$(19) \quad \xi = \frac{x}{p}, \quad \eta = \frac{y}{p}$$

або в іншій формі

$$(19a) \quad x : y : p = \xi : \eta : 1$$

З сего бачимо, що величини x , y , p є однородними сорядними прямокутними точки P' . На будуче будемо уживати тільки тих сорядних і тому можемо сказати, що відповідні точки на площі і на граничній кулі мають ті самі сорядні.

2. Рівнання відповідних кривих на площі і на граничній кулі є ті самі, бо кожна пара відповідних точок має ті самі сорядні. З окрема пряма в площі і відповідне граничне коло будуть мати те саме рівнання.

3. Відповідні точки. Ми бачили, що точка о сьорядних x, y, p є дійсна, безконечно далека згл. ідеальна після того, чи

$$p^2 - x^2 - y^2 - 0, = 0 \text{ згл. } < 0.$$

На граничній кулі сї нерівности вказують, що відповідна точка лежить внутр. на, згл. зовні кола

$$(20) \quad x^2 + y^2 - p^2 = 0.$$

Коло представлене сим рівнанєм називаємо основним колом. І можемо сказати, що точкам дійсним, безконечно далеким згл. ідеальним на площі відповідають точки внутр. на, згл. зовні основного кола і на відворот.

4. Віддаленє двох точок. Пригляньмо ся тепер, яке значіне буде мати віддаленє двох точок на площі для відповідних точок на граничній кулі. Після взору (15) віддаленє двох точок $P_1(x_1, y_1, p_1)$ і $P_2(x_2, y_2, p_2)$ виражує ся рівнанєм

$$ch d = p_1 p_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2,$$

де $d = P_1 P_2$. Відповідні точки на граничній кулі P'_1 і P'_2 мають сьорядні

$$P'_1(x_1, y_1, p_1) \text{ і } P'_2(x_2, y_2, p_2).$$

Кожда наша точка на граничнім колі $P'_1 P'_2$ має сьорядні

$$x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, p_1 + \lambda p_2.$$

Точки пересічи граничного кола $P'_1 P'_2$ з основним колом (20) означім через D_1 і D_2 і шукаймо, як велике є подвійне відношенє $(P'_1 P'_2 D_1 D_2)$. Для тих точок пересічи очевидно мусить бути

$$(x_1 + \lambda x_2)^2 + (y_1 + \lambda y_2)^2 - (p_1 + \lambda p_2)^2 = 0$$

або

$$(p_1^2 - x_1^2 - y_1^2) + 2(p_1 p_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2) \cdot \lambda + (p_2^2 - x_2^2 - y_2^2) \cdot \lambda^2 = 0,$$

а узгляднивши рівняня (10) і (15), одержимо

$$\lambda^2 + 2 \lambda \cdot ch^2 d + 1 = 0.$$

Рівнанє се дає корінї

$$\lambda_1 = -e^d \text{ і } \lambda_2 = -e^{-d}.$$

Тим самим

$$(P'_1 P'_2 D_1 D_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{2d},$$

а

$$(21) \quad d = \frac{1}{2} \ln (P'_1 P'_2 D_1 D_2).$$

5. Кут двох прямих. Нехай будуть на площі дані дві перетинаючіся прямі

$$g_1(u_1, v_1, w_1) \text{ і } g_2(u_2, v_2, w_2).$$

Кут $\alpha = \sphericalangle g_1 g_2$ на підставі взору (16) буде виражений рівнянням

$$\cos \alpha = u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2.$$

Після уваги в горі в уступі 2. відповідні граничні кола g'_1 і g'_2 мають ті самі рівняння, що прямі g_1 і g_2 на площі т. є

$$(g'_1) \quad u_1 x + v_1 y - w_1 p = 0$$

$$(g'_2) \quad u_2 x + v_2 y - w_2 p = 0$$

Тим самим сорядні однородні граничних кіл g'_1 і g'_2 будуть такі

$$g'_1(u_1, v_1, -w_1) \text{ і } g'_2(u_2, v_2, -w_2).$$

Кожде инше граничне коло, що переходить через точку пересічки кіл g'_1 і g'_2 має сорядні

$$u_1 + \lambda u_2, \quad v_1 + \lambda v_2, \quad -(w_1 + \lambda w_2).$$

Шукаймо тепер λ для таких граничних кіл d_1 і d_2 , що є стичними основного кола (20), якого рівнянє в лінійних сорядних звучить

$$u^2 + v^2 - w^2 = 0$$

Для таких λ буде

$$(u_1 + \lambda u_2)^2 + (v_1 + \lambda v_2)^2 - (w_1 + \lambda w_2)^2 = 0$$

або

$$(u_1^2 + v_1^2 - w_1^2) + 2(u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2) \lambda + (u_2^2 + v_2^2 - w_2^2) \lambda^2 = 0$$

після взорів (13) і (16) се рівнянє зводить ся до

$$1 + 2 \lambda \cos \alpha + \lambda^2 = 0,$$

а звідси

$$\lambda_1 = -e^{i\alpha}, \quad \lambda_2 = -e^{-i\alpha}$$

А з того слїдує

$$(g'_1 g'_2 d_1 d_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{2i\alpha}.$$

або

$$(22) \quad \alpha = \frac{1}{2i} \ln (g'_1 g'_2 d_1 d_2).$$

6. Рух в площі означає ся рівняннями (17) і (18). Тими самими рівняннями означає ся на граничній кулі ті метові трансформації, при яких основне коло остає без зміни.

7. Мет на граничну кулю метовим означенєм мір. З повисшого бачимо, що кидаючи площу на граничну кулю одержуємо представленє геометрії Лобачевського при помочи метового означеня мір. При тім основною кривою другого степеня є коло о рівнаню (20)

$$x^2 + y^2 - p^2 = 0,$$

стала для означеня довжини $c = \frac{1}{2}$, а для означеня кутів $c' = \frac{I^1}{2i}$). При помочи нашого мету ми є в можности до кожного твердження геометрії Лобачевського найти відповідне твердження на граничній кулі, отже в евклідовій геометрії і на відворот. Тому можемо бути певні, що ніколи не знайде ся противорічність в геометрії Лобачевського, бо тоді мусілаб бути суперечність і в евклідовій геометрії.



¹⁾ Klein: Über die sogenannte nichteuclidische Geometrie. Math. Annalen IV. 1871, ст. 573—625 і VI. 1873, ст. 112—145.

INHALT.

In dieser Arbeit zeigt der Verfasser, dass die Projektion der Geometrie in der Lobatschewskij-schen Ebene auf eine Grenzkugel mit Hilfe der Axen der letzteren die projektive Massbestimmung ist. Auf solche Weise wurde die Lobatschewskij-sche Geometrie in der Ebene mit der euklidischen auf der Grenzfläche verbunden und man ist in der Lage mit Hilfe dieses Wurfes zu jeder Figur in der Lobatschewskij-schen Ebene die entsprechende auf der Grenzfläche d. h. in der euklidischen Geometrie zu finden. Daraus folgt, dass in der Lobatschewskij-schen Geometrie keine Widersprüche möglich sind, weil dann auch in der entsprechenden Figur auf der Grenzkugel d. i. in der euklidischen Geometrie Widersprüche vorkommen müssten und das ist unmöglich.
